Statystyka
Lista 1

Niech $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie μ. Piszemy wtedy $X_1, \ldots, X_n, \cdots \sim_{i.i.d} \mu$ i skończony ciąg $X_1, \ldots, X_n$ nazywamy *n-elementową próbką z rozkładu μ. Dystrybuantę empiryczną* dla tej próbki definiujemy wzorem

$$\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{I}(X_i \leq x), \qquad x \in \mathbb{R} .$$

Zad 1. Wyznaczyć rozkład dystrybuanty empirycznej $\hat{F}_n(x)$.

Zad 2. Obliczyć $\mathbb{E}(\hat{F}_n(x))$, $\mathrm{Var}(\hat{F}_n(x))$ $\mathrm{Cov}(\hat{F}_n(x), \hat{F}_n(y))$.

Zad 3. Niech F będzie dystrybuantą rozkładu μ. Pokazać, że ciąg zmiennych losowych $\sqrt{n}(\hat{F}_n(x) - F(x))$ jest zbieżny do rozkładu normalnego. Zidentifikować parametry tego rozkładu.

Zad 4. Niech X będzie zmienną losową z ciągłą dystrybuntą F. Wykazać, że $F(X) \sim \mathcal{U}(0,1)$. Czy założenie o ciągłości F można opuścić?

Zad 5. Załóżmy (dla uproszczenia, to nie jest istotne), że dystrybuanta F jest funkcją ciągła i ściśle rosnącą, a zatem istnieje funkcja odwrotna $F^{-1} : (0,1) \to \mathbb{R}$.[1] Pokazać, że jeśli $U \sim \mathcal{U}(0,1)$, to zmienna losowa $X := F^{-1}(U)$ ma dystrybuantę F.

Zad 6. Pokazać, że dla funkcji gamma: $\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1}e^{-t}\,dt$, $a > 0$; zachodzi $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$. Ponadto, jeśli $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, to $\mathbb{E}(|X|^p) = \sqrt{2^p/\pi} \cdot \Gamma((p+1)/2)$.

Zad 7. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi odpowiednio o rozkładach $\mathrm{Gamma}(\alpha, \lambda)$ oraz $\mathrm{Gamma}(\beta, \lambda)$. *Rozkład gamma* $\mathrm{Gamma}(\alpha, \lambda)$ dla $\alpha > 0$, $\lambda > 0$ ma gęstość daną wzorem:

$$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \mathbb{I}(x > 0) .$$

Wyznaczyć rozkład $X + Y$.

Zad 8. Niech $X_1, \ldots, X_n, \cdots \sim_{i.i.d} \mathcal{N}(0,1)$. Rozkład zmiennej losowej

$$X_1^2 + ... + X_n^2$$

oznaczamy $\chi^2(n)$ i nazywamy *rozkładem chi kwadrat o n stopniach swobody.* Wykazać, że $\chi^2(n) = \mathrm{Gamma}(n/2, 1/2)$.

Zad 9. Niech X i Z będą niezależnymi zmiennymi losowymi oraz $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ i $Z \sim \chi^2(n)$. Rozkład zmiennej losowej

$$T = \frac{X}{\sqrt{Z/n}}$$

nazywamy *rozkładem t-studenta* o n-stopniach swobody i oznaczamy go przez $\mathrm{t}(n)$. Wykazać, że $\mathrm{t}(n)$ jest rozkładem ciągłym o gęstości danej wzorem

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{n\pi}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} .$$

[1] W ogólnym przypadku można rozważać funkcję daną wzorem $F^{-1}(y) := \min\{x : F(x) \geq y\}$.